CHAPITRE 2 SUITES NUMERIQUES

I. RESUME DE COURS

Généralités

Définition

On appelle suite numérique, toute application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

Propriétés

Propriété	Condition
On dit que la suite (U_n) est…	Si …
croissante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n \geq 0$
strictement croissante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n > 0$
décroissante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n \leq 0$
constante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n = 0$
monotone	La suite est croissante ou décroissante
majorée	il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $U_n \leq M$
minorée	il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $U_n \geq m$
Bornée	elle est à la fois majorée et minorée
Positive	pour tout entier naturel n ; $U_n \geq 0$
périodique de période $T > 0$	pour tout entier naturel n ; $U_{n+T} = U_n$
Convergente	Elle possède une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$
convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \lvert U_n - \ell \rvert = 0$
Divergente	Elle n'est pas convergente : n'a pas de limite ou possède une limite infinie.

Remarque

Soit (U_n) une suite de termes strictement positifs.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1, \forall n \Rightarrow (U_n) \text{ est croissante}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1, \forall n \Rightarrow (U_n) \text{ est décroissante}$$

Suites arithmétiques	
Propriété caractéristique	Il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $U_{n+1} - U_n = r$ Le réel r est appelé <u>raison</u> de la suite
Terme général	$u_n = u_0 + nr$
	$u_n = u_1 + (n-1)r$
	$u_n = u_p + (n-p)r$
Raison	$r = \frac{u_p - u_q}{p-q}$, $p \neq q$
Monotonie	$r > 0 \Rightarrow (U_n)$ est strictement croissante
	$r < 0 \Rightarrow (U_n)$ est strictement décroissante
	$r = 0 \Rightarrow (U_n)$ est constante
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique: $S = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$	$S = \frac{\text{nombre de termes}}{2}(\text{premier terme} + \text{dernier terme})$ $S = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$
En particulier, la somme des entiers naturels de 1 à n:	$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors le terme b est appelé moyenne arithmétique de a et c	$b = \frac{a+c}{2}$, $U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$, $U_{n-p} + U_{n+p} = 2U_n$, $n \geq p$
moyenne arithmétique d'une série de n nombres : $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$	$a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

<u>Remarque</u>

Toute suite (U_n) définie par $U_n = an + b$, (où $a, b \in \mathbb{R}$) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b.

Suites géométriques

Propriété caractéristique	**il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait $U_{n+1} = qU_n$** **le réel q est appelé <u>raison</u> de la suite**
Terme général	$u_n = u_0 q^n = u_1 q^{n-1} = u_p q^{n-p}$
Raison	$q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}$
La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q: $S = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$	$q \neq 1 \Rightarrow$ $S = \text{premier terme} \times \frac{1-(\text{raison})^{\binom{\text{nombre}}{\text{de termes}}}}{1-\text{raison}}$ $q \neq 1 \Rightarrow S = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ $q = 1 \Rightarrow S = (n-p+1)u_p$
La somme des puissances consécutives d'un nombre :	$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad x \neq 1$
Convergence **(Premier terme non nul)**	$\lvert q \rvert < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ $\lvert q \rvert > 1 \Rightarrow (U_n)$ est divergente $q = -1 \Rightarrow (U_n)$ est divergente : alternée $q = 1 \Rightarrow (U_n)$ est convergente : constante
Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique , alors le terme b est appelé moyenne géométrique de a et c	$b^2 = ac$ $U_n^2 = U_{n-1} \times U_{n+1}$ $U_{n-p} \times U_{n+p} = U_n^2, \quad n \geq p$ $U_n = \sqrt{U_{n-1} \times U_{n+1}} = \sqrt{U_{n-p} \times U_{n+p}}, \quad n \geq p$ **si (U_n) est une suite positive.**
moyenne géométrique d'une série de n nombres : $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$	$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 ... x_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$

Remarques :

- Toute suite (U_n) définie par $U_n = aq^n$, (où $a, q \in \mathbb{R}$) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.

- Si le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est constant, alors la suite est géométrique de raison $q = \frac{U_{n+1}}{U_n}$.

Convergence

Propriétés

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.
- Toute suite monotone et bornée converge.
- Si, à partir d'un certain rang, $|U_n - \ell| \leq \alpha_n$, et si $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$, alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$.
- Si, à partir d'un certain rang, $U_n \leq V_n \leq W_n$, et si $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} W_n = \ell$, alors $\lim_{n \to +\infty} V_n = \ell$. (Théorème des gendarmes)

Suites adjacentes

Deux suites sont dites adjacentes si, et seulement si, l'une est croissante, l'autre est décroissante et elles convergent vers la même limite.

- Si deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, (U_n) est croissante, (V_n) est décroissante et $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = \ell$, alors pour tout entier naturel n :

$$U_0 \leq U_1 \leq \ldots \leq U_n \leq \ell \leq V_n \leq V_{n-1} \leq \ldots \leq V_1 \leq V_0$$

- Si deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, alors :

(U_n), (V_n) ont même limite $\Leftrightarrow$ $\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$

Raisonnement par récurrence

Principe

On considère une propriété $P(n)$ qui dépend d'un entier naturel n. Soit n_0 un entier naturel. Si $P(n_0)$ est vraie, et si pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Etapes de démonstration par récurrence

1) **L'initialisation : On montre que $P(n_0)$ est vraie,**
2) **L'hérédité : On montre que $P(n)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vraie .**
3) **Conclusion : Pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie .**

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans cet exercice, (U_n) est une suite numérique telle que $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3U_{n+1} - 2U_n = 0$.

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		A	B	C	D
1	Le terme général de la suite (U_n) est	$U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$	$U_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$	$U_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$
2	(U_n) est une suite	croissante	décroissante	divergente	non monotone
3	La somme $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ est égale à	$\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{3}$	$3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$	$3\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right)$	$\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}{3}$
4	$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n =$	0	$+\infty$	$-\infty$	1
5	(U_n) est une suite	minorée par 1	majorée par 1	convergente vers 1	Divergente
6	La suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ est	géométrique	Arithmétique	constante	Positive

QCM 2

Dans cet exercice (u_n) est une suite à termes strictement positifs, on définit la suite (v_n) de terme général: $v_n = \frac{2}{u_n}$.

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses A	B	C	D
1	Si (u_n) est majorée par 2, alors (v_n) est:	majorée par 2	minorée par 2	minorée par 1	bornée
2	Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors :	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 2$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sqrt{2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n < \lim\limits_{n\to\infty} v_n$
3	Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est:	croissante	décroissante	constante	non monotone
4	Si (u_n) est géométrique de raison 3 , alors (v_n) est:	géométrique de raison $\frac{2}{3}$	géométrique de raison $\frac{1}{3}$	arithmétique	Divergente
5	Si (u_n) est arithmétique de raison 5 , alors (v_n) :	converge vers $\frac{2}{5}$	converge vers 0	diverge	est arithmétique
6	Si (u_n) est périodique de période 4 , alors (v_n) est:	non monotone	périodique de période 2	convergente	constante

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+2U_n}, \quad \forall n \in IN \end{cases}$$

On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n}, \quad \forall n \in IN$

1.a) Calculer U_1, U_2, V_0, V_1 **et** V_2.

b) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique et déterminer sa raison.

2) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) Etudier la convergence de (U_n) et (V_n).

Exercice 2

Pour tout entier naturel n on pose : $U_n = \dfrac{2^n - 4n + 3}{2}$, $V_n = \dfrac{2^n + 4n - 3}{2}$

1) Déterminer la nature de chacune des suites (a_n) et (b_n) tels que:

$a_n = U_n + V_n$; $b_n = U_n - V_n$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$

2) En déduire : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$; $S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n on pose :

$$S_n = \frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{3\times 5} + \frac{2}{5\times 7} + \cdots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

1) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{a}{2k+1}+\frac{b}{2k+3}$$, pour tout $k \in \mathbb{N}$

2) En déduire une expression simple de S_n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3 .

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

4) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 5 (Bac D)

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$

1.a) Calculer U_1 , U_2 et U_3.

b) Justifier que la suite (U_n) :

- N'est pas arithmétique ;
- N'est pas géométrique ;
- Est convergente.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $$V_n = \frac{n^2-1}{n}.$$

a) Montrer que : $U_n = V_{n+1} - V_n$

b) En déduire l'expression de la somme :

$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ **en fonction de n.**

3) Pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $W_n = \ln V_n$ et $S'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$.

Démontrer que : $S'_n = \ln\left(\frac{(n+1)!}{2n}\right)$.

Exercice 6

Soit a_n et b_n les suites définies pour tout n entier naturel par :

$$\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$$

1) Calculer a_1 et b_1, a_2 et b_2.

2) Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = a_n + b_n$. Montrer que u_n est constante et calculer u_n.

3) Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = a_n - b_n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de v_n en fonction de n. Justifier que (v_n) est négative.

4) Exprimer a_n et b_n en fonction de u_n et v_n puis en fonction de n.) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

5) Montrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

6) Que peut-on dire des suites (a_n) et (b_n) ?

Exercice 7

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2 et v_1 , v_2.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$

a) Montrer que w_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser sa limite.

3) Etudier les sens de variations de deux suites u_n et v_n, puis démontrer que u_n et v_n sont adjacentes

4.a) Démontrer que la suite t_n définie par : $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ est une suite constante.

b) En déduire la limite commune de u_n et v_n.

Exercice 8

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$.

Exercice 9

1) Montrer que pour tout réel x positif ou nul et pour tout entier n positif ou nul, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2) Soit la suite définie par : $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

3.a) Montrer que pour tout $n > 0$, on a $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$.

b) En déduire le sens de variation de (u_n).

4.a) Monter que $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 10

Démontrer par récurrence que :

$$3+4+5\cdots+n=\frac{(n-2)(n+3)}{2}; \text{ pour tout } n \geq 3.$$

Exercice 11

Démontrer par récurrence que :

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \text{ pour tout } n \geq 1$$

Exercice 12 (D'après Bac)

On considère la suite numérique de terme général $U_n = \frac{n}{e^n}$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

1. a) Calculer U_1 et U_2.

b) Prouver que la suite (U_n) est positive et décroissante. Conclure.

c)Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$ (*). En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

a) En utilisant l'égalité (*) prouver que : $S_n = \frac{-1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})$.

b) Déduire de ce qui précède: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1.a) On a :

$$U_1 = \frac{U_0}{1+2U_0} = \frac{1}{3}$$

$$U_2 = \frac{U_1}{1+2U_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$$

$$V_1 = \frac{1}{U_1} = 3$$

$$V_2 = \frac{1}{U_2} = 5$$

b) Pour montrer que la suite (V_n) est arithmétique, il suffit de montrer que la différence $V_{n+1} - V_n$ est constante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a : $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1+2U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n}$

Alors $V_{n+1} - V_n = 2$ **et la suite (V_n) est arithmétique de raison $r = 2$.**

2) On sait que $V_n = V_0 + nr$. **Alors** $V_n = 1 + 2n$.

Or $U_n = \frac{1}{V_n}$, $\forall n \in IN$, **on a** $U_n = \frac{1}{1+2n}$, $\forall n \in IN$.

3) On a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+2n) = +\infty$. **Alors la suite (V_n) est divergente.**

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+2n} = 0$. **Alors la suite (U_n) est convergente vers 0.**

Corrigé 2

1) On a

$$a_n = U_n + V_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} + \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$
$$= \frac{2^n + 2^n}{2} = 2^n$$

Donc $a_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2a_n$

Alors (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

On a aussi

$$b_n = U_n - V_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} - \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$
$$= \frac{-8n + 6}{2} = -4n + 3$$

$b_{n+1} = -4(n + 1) + 3 = -4n - 4 + 3 = b_n - 4$.

Alors $b_{n+1} - b_n = 4, \forall n \in \mathbb{N}$ et la suite (b_n) est arithmétique de raison $r = -4$.

2) Pour calculer les sommes on a :

$$S_n + S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n + V_0 + V_1 + \cdots + V_n$$
$$= (U_0 + V_0) + (U_1 + V_1) + \cdots + (U_n + V_n)$$

$$S_n + S'_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$
$$= a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

$$S_n + S'_n = 2^{n+1} - 1$$

D'autre part ;

$$S_n - S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n - V_0 - V_1 - \cdots - V_n$$
$$= (U_0 - V_0) + (U_1 - V_1) + \cdots + (U_n - V_n)$$

$$S_n - S'_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$$
$$= \frac{(n + 1)(b_0 + b_n)}{2}$$

$$S_n - S'_n = \frac{(n+1)(3-4n+3)}{2}$$
$$= (n+1)(-2n+3)$$

$$S_n - S'_n = (n+1)(-2n+3)$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} S_n + S'_n = 2^{n+1} - 1 & (1) \\ S_n - S'_n = (n+1)(-2n+3) & (2) \end{cases}$$

Par addition $2S_n = 2^{n+1} - 1 + (n+1)(-2n+3)$

Donc $S_n = \frac{1}{2}[2^{n+1} - 1 + (n+1)(-2n+3)]$..

Par soustraction : $2S'_n = 2^{n+1} - 1 - (n+1)(-2n+3)$

Donc $S'_n = \frac{1}{2}[2^{n+1} - 1 - (n+1)(-2n+3)]$.

Corrigé 3

1) On utilise une identification :

(Plusieurs étapes : réduction au même dénominateur ; développement, réduction, ordre puis identification)

$$\frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3} = \frac{a(2k+3) + b(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3} = \frac{2ak + 3a + 2bk + b}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3} = \frac{(2a+2b)k + 3a + b}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2a+2b)k + 3a + b}{(2k+1)(2k+3)}$$

Par identification :

$$\begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ 3a + b = 2 \end{cases}$$

Alors $a = 1, b = -1$.

Donc $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}$; $\forall k \in \mathbb{N}$

2) Pour trouver une forme simple de S_n on écrit l'identité précédente pour $k = 0,1,2,\dots,n$

$k = 0 \Rightarrow \frac{2}{1\times 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$

$k = 1 \Rightarrow \frac{2}{3\times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

$k = 2 \Rightarrow \frac{2}{5\times 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$

$\vdots \qquad \vdots$

$k = n \Rightarrow \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$

On additionne membre à membre et on simplifie on obtient :

$S_n = 1 - \frac{1}{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Corrigé 4

1) On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

$u_1 = u_0 + 2\times 0 + 3 \Rightarrow u_1 = 1 + 3 \Rightarrow u_1 = 4$

$u_2 = u_1 + 2\times 1 + 3 \Rightarrow u_2 = 4 + 2 + 3 \Rightarrow u_2 = 9$

$u_3 = u_2 + 2\times 2 + 3 \Rightarrow u_2 = 9 + 4 + 3 \Rightarrow u_3 = 16$

2) On a , pour tout entier naturel $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc (u_n) est strictement croissante.

3. a) Démonstration par récurrence :

- **On a : $u_0 = 1 > 0^2$, la propriété est vraie au rang 0.**
- **On suppose que $u_n > n^2$ et on démontre que $u_{n+1} > (n+1)^2$.**

D'après l'hypothèse, en ajoutant $2n+3$, on obtient $u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$

Donc $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$. Or $n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1$, alors $u_{n+1} > n^2 + 2n + 1$. Enfin $u_{n+1} > (n+1)^2$.

- **Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.**

b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$, et que n^2 tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, u_n tend clairement vers $+\infty$.

4) D'après 1) on a: $u_0 = 1, u_1 = 4, u_2 = 9, u_3 = 16$. On voit apparaître la suite des carrés des entiers consécutifs 1, 2, 3 et 4. La comparaison de la valeur de u_n avec le carré de l'indice n permet de conjecturer que $u_n = (n+1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Utilisons une démonstration par récurrence pour montrer cette conjecture.

Pour $n = 0$, on a que $u_0 = 1 = (0+1)^2$. L'égalité est vérifiée.

- **On suppose que $u_n = (n+1)^2$ et on démontre que $u_{n+1} = (n+2)^2$.**

D'après l'hypothèse, en ajoutant $2n+3$, on obtient $u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3$

Donc $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$

$u_{n+1} = n^2 + 4n + 4$, alors $u_{n+1} = (n+2)^2$.

- **Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.**

Corrigé 5

La suite numérique (U_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$U_n = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}.$$

1.a) Calcul de termes :

$$U_1 = \frac{1^2 + 1 + 1}{1(1+1)} = \frac{3}{2}$$

$$U_2 = \frac{2^2+2+1}{2(2+1)} = \frac{7}{6} \quad ; \qquad U_3 = \frac{3^2+3+1}{3(3+1)} = \frac{13}{12}$$

b) On a : $U_2 - U_1 = \frac{7}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}$ **et** $U_3 - U_2 = \frac{13}{12} - \frac{7}{6} = -\frac{1}{12}$

Comme $U_2 - U_1 \neq U_3 - U_2$**, la suite** (U_n) **n'est pas arithmétique.**

- $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{9}$ **et** $\frac{U_3}{U_2} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{7}{6}} = \frac{13}{14}$.

Comme $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_3}{U_2}$**, la suite** (U_n) **n'est pas géométrique .**

- $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1.$

La suite (U_n) **admet une limite finie, donc** (U_n) **est convergente.**

2. Pour $n \geq 1$**,** $V_n = \frac{n^2-1}{n}$.

a) On a : $V_{n+1} - V_n = \frac{(n+1)^2-1}{n+1} - \frac{n^2-1}{n} = \frac{n^2+2n+1-1}{n+1} - \frac{n^2-1}{n}$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{n^2+2n}{n+1} - \frac{n^2-1}{n}$$

$$= \frac{n(n^2+2n)-(n+1)(n^2-1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2-(n^3-n+n^2-1)}{n(n+1)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{n^3+2n^2-n^3+n-n^2+1}{n(n+1)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

Alors : $U_n = V_{n+1} - V_n$

b) On utilise le résultat précédent pour simplifier la somme $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$. On obtient :

$$\begin{cases} U_1 = V_2 - V_1 \\ U_2 = V_3 - V_2 \\ . \\ . \\ . \\ U_{n-1} = V_n - V_{n-1} \\ U_n = V_{n+1} - V_n \end{cases}$$

En faisant la somme on trouve $S_n = V_{n+1} - V_1$.

On sait que $V_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$ et $V_1 = 0$. Alors $S_n = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$.

3. Pour tout entier $n \geq 2$:

$W_n = \ln V_n$ et $S'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$.

On a : $S'_n = \ln V_2 + \ln V_3 + \cdots + \ln V_n = \ln(V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n)$

D'autre part, on peut écrire : $V_n = \dfrac{n^2-1}{n} = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n}$.

Donc : $V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \dfrac{1\times 3}{2} \times \dfrac{2\times 4}{3} \times \dfrac{3\times 5}{4} \times \dfrac{4\times 6}{5} \cdots \times \dfrac{(n-1)(n+1)}{n}$ Après simplification, on peut écrire :

$$V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times \cdots \times (n-1)}{2} \times (n+1)$$

On peut aussi écrire :

$$V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times \cdots \times (n-1)\times n\times (n+1)}{2n}$$

D'où : $V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \dfrac{(n+1)!}{2n}$. Enfin $S'_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)!}{2n}\right)$.

Corrigé 6

1) On a pour n = 0 :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{5}(3a_0 + 2b_0) = \frac{1}{5}(3\times2+2\times3) = \frac{12}{5} \\ b_1 = \frac{1}{5}(2a_0 + 3b_0) = \frac{1}{5}(2\times2+3\times3) = \frac{13}{5} \end{cases}$$

Pour n = 1 :

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{5}(3a_1 + 2b_1) = \frac{1}{5}(3\times\frac{12}{5}+2\times\frac{13}{5}) = \frac{62}{25} \\ b_2 = \frac{1}{5}(2a_1 + 3b_1) = \frac{1}{5}(2\times\frac{12}{5}+3\times\frac{13}{5}) = \frac{63}{25} \end{cases}$$

2) Pour montrer que (u_n) est une suite constante, il suffit de montrer que $u_{n+1} = u_n$ pour tout n.

$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) + \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) = \frac{1}{5}(5a_n + 5b_n) = a_n + b_n = u_n$.

(u_n) est donc constante de terme général $u_n = u_0 = a_0 + b_0 = 5$.

3) Montrons que (v_n) est géométrique :

$v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) - \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) = \frac{1}{5}(a_n - b_n) = \frac{1}{5}v_n$.

(v_n) est donc, une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - b_0 = -1$

. On a donc $v_n = v_0 q^n = -1\times\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{-1}{5^n}$.

Il est clair que pour tout n, $\frac{-1}{5^n} < 0$. Donc $v_n < 0$. Alors (v_n) est négative.

4) On a :

$$\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = a_n - b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n + v_n = 2a_n \\ u_n - v_n = 2b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{u_n + v_n}{2} \\ b_n = \frac{u_n - v_n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right) \\ b_n = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{1}{5^n}\right) \end{cases}.$$

Comme $\frac{1}{5^n}$ tend vers 0 à l'infini, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{5}{2}$.

5) On a pour tout n :

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) - a_n = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n - 5a_n) = \frac{1}{5}(-2a_n + 2b_n) = \frac{2}{5}(-a_n + b_n) = \frac{-2}{5}v_n \\ b_{n+1} - b_n = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) - b_n = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n - 5b_n) = \frac{1}{5}(2a_n - 2b_n) = \frac{2}{5}(a_n - b_n) = \frac{2}{5}v_n \end{cases}$$

Alors $\begin{cases} a_{n+1} - a_n > 0 \\ b_{n+1} - b_n < 0 \end{cases}$ car (v_n) est négative.

Donc (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

6) Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes car (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante, et elles convergent vers la même limite : $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{5}{2}$.

Corrigé 7

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Calcul de u_1, u_2 et v_1, v_2 :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \rightarrow \boxed{u_1 = \frac{7}{2}} \quad ; v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2}+4}{2} = \frac{\frac{15}{2}}{2} = \frac{15}{4} \rightarrow \boxed{v_1 = \frac{15}{4}}$$

De la même manière on calcule u_2 et v_2 :

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2}+\frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{29}{4}}{2} = \frac{29}{8} \rightarrow \boxed{u_2 = \frac{29}{8}} \quad \text{et } v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{\frac{29}{8}+\frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{59}{8}}{2} = \frac{59}{16}$$

$$\rightarrow \boxed{v_2 = \frac{59}{16}}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $w_n = v_n - u_n$

a) On montre que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$:

Nous avons $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}$ (on remplace u_{n+1} et v_{n+1} par leurs valeurs dans les formules de récurrences)

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$= \frac{u_{n+1} + v_n - u_n - v_n}{2}$$

$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{2}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + v_n}{2} - u_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

$$= \frac{1}{4} w_n$$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

b) Expression de w_n en fonction de n :

(w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $w_n = w_0 . q^n = 1.\left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow \boxed{w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

*** Calcul de la limite de w_n :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. La raison de la suite w_n vérifie $|q| = \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = 0$

3) Sens de variations de u_n et v_n :

Nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$$
$$= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$$
$$= \frac{v_n - u_n}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$
$$= \frac{1}{2}.w_n$$
$$= \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$$

Donc u_n est une suite strictement croissante.

De la même façon on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n$$
$$= \frac{u_{n+1} + v_n - 2v_n}{2}$$
$$= \frac{1}{2}.(u_{n+1} - v_n)$$
$$= \frac{1}{2}.\left[\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) - v_n\right]$$
$$= \frac{1}{2}.\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$
$$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{4}(v_n - u_n) = -\frac{1}{4}w_n < 0$$

Donc (v_n) est strictement décroissante.

*** On montre que u_n et v_n sont adjacentes :**

La suite u_n est une suite strictement croissante, la suite v_n est strictement décroissante. De plus, d'après la question 2) $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to \infty}(v_n - u_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} v_n$. On en déduit que u_n et v_n sont adjacentes

4) (t_n) est la suite définie par : $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

a) On démontrer que la suite t_n est constante :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3}$$

$$= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + 2.\frac{u_{n+1} + v_n}{2}}{3}$$

$$= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n}{3}$$

$$t_{n+1} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{3}$$

$$= \frac{2\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) + v_n}{3}$$

$$= \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$= t_n$$

Donc pour tout entier naturel n, on a $t_{n+1} = t_n$ la suite (t_n) est donc constante.

b) Calcul de la limite de u_n et v_n :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n = t_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} t_n = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{3 + 2 \times 4}{3} = \frac{11}{3}$

D'autre part, $\lim_{n \to \infty} t_n = \lim_{n \to \infty} \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{11}{3}$

Puisque $\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} v_n = l$ on en déduit que $\frac{l + 2l}{3} = \frac{11}{3}$ soit $\boxed{l = \frac{11}{3}}$.

Corrigé 8

Initialisation: Pour n=1 la propriété est $1! \geq 2^{1-1}$ ce qui est vrai car $1 \geq 1$.

Hérédité :

Supposons que $n! \geq 2^{n-1}$; et montrons que $(n+1)! \geq 2^{n+1-1}$ c'est-à-dire $n!(n+1) \geq 2^n$.

On sait que pour tout entier *n* strictement positif, on a $n+1 \geq 2$ et par hypothèse $n! \geq 2^{n-1}$. Donc en multipliant les deux inégalités, on obtient $n!(n+1) \geq 2^{n-1} \times 2 = 2^n$.

Conclusion : Pour tout entier *n* strictement positif, on a $n! \geq 2^{n-1}$.

Corrigé 9

1) Démontrons par récurrence :

Initialisation: pour $n = 0$, on a :

$(1+x)^0 \geq 1 + 0x \Leftrightarrow 1 \geq 1$; la propriété est vraie.

Hérédité :

On suppose que $(1+x)^n \geq 1+nx$ et on montre que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

D'après l'hypothèse en multipliant par 1+x :

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Conclusion : Pour tout entier *n* positif ou nul, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2.a) Calcul de termes :

$$u_n = \frac{n!}{n^n}$$

Donc $u_1 = \frac{1!}{1^1} = 1$, $u_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2}$ et $u_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

3.a) On a

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n!\,(n+1)^{n+1}}{n^n\,(n+1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n+1)\times n!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

On applique l'inégalité du 1. avec $x=\frac{1}{n}$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\frac{1}{n}=2.$

b) Or tous les termes de la suite sont positifs, on a donc

$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} < 1$, **la suite est bien décroissante.**

4.a) Démontrons par récurrence que $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ **pour tout entier** $n \geq 1$.

On a $u_1 = 1 \leq \frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{1} = 1$ **; la propriété est vraie pour** $n=1$.

On suppose que $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ **et on démontre que** $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$.

D'après l'hypothèse, en multipliant par $\frac{1}{2}$: $0 \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$.

D'autre part, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$. **Alors** $u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$.

La suite (u_n) **est positive, donc** $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$.

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$**, et que** $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$**, on a** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **(théorème des gendarmes).**

Corrigé 10

- **Observons que pour $n = 3$:**

Le premier membre est égal à 3

Le second membre est égal à $\frac{(3-2)(3+3)}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

La propriété est donc initialisée, elle est vraie au rang $n = 3$.

- **Supposons que, pour un certain entier $n \geq 3$, fixé, on ait la propriété**

$3+4+5\cdots+n = \frac{(n-2)(n+3)}{2}$.

- **Montrons qu'alors, on a la propriété** $3+4+5\cdots+(n+1) = \frac{(n-1)(n+4)}{2}$.

On a $3+4+5\cdots+(n+1) = (3+4+5\cdots+n)+(n+1)$

Donc d'après l'hypothèse, en ajoutant (n+1) aux deux membres, on obtient

$$\begin{aligned} 3+4+5\cdots+n+(n+1) &= \frac{(n-2)(n+3)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{(n-2)(n+3)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n^2-2n+3n-6)+2n+2}{2} \end{aligned}$$

Donc $3+4+5\cdots+n+(n+1) = \frac{n^2+3n-4}{2}$

Enfin $3+4+5\cdots+(n+1) = \frac{(n-1)(n+4)}{2}$.

La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 3$.

Conclusion :La propriété $3+4+5\cdots+n = \frac{(n-2)(n+3)}{2}$; **est vraie pour tout entier** $n \geq 3$.

Corrigé 11

- **Observons que pour $n = 1$:**

Le premier membre est égal à $1^2 = 1$

Le second membre est égal à $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

La propriété est donc <u>initialisée</u>, elle est vraie au rang n = 1.

- <u>Supposons</u> que, pour un certain entier $n \geq 1$, fixé, on ait la propriété $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- <u>Montrons</u> qu'alors, on a la propriété $1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

soit $1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

D'après l'hypothèse, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ en ajoutant $(n+1)^2$ aux deux membres, on obtient

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

En factorisant par (n + 1), on obtient

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

On factorise $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$, on obtient

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

La propriété est donc <u>héréditaire</u> à partir du rang n = 1.

<u>Conclusion :</u>La propriété $1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Corrigé 12

1) La suite (U_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par son terme général $U_n = \frac{n}{e^n}$.

a) Calcul de termes :

$$U_1 = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$U_2 = \frac{2}{e^2} = 2e^{-2}$$

b) Nous constatons que $U_n = \frac{n}{e^n}$ est le quotient de deux nombres positifs. Alors pour tout $n \geq 1$, on a : $U_n > 0$.

On a

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n}$$

$$= \frac{n+1}{en}$$

$$= \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or pour tout $n \geq 1, \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ et $1 + \frac{1}{n} \leq 2$, on a $\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$. Donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ et la suite (U_n) est décroissante.

Comme la suite (U_n) est décroissante et positive, donc minorée, on conclut qu'elle est convergente.

c) Pour démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$ (*)

on a : $$U_{n+1} = \frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e} \times \frac{n+1}{e^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}\left(\frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n}\right)$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}(U_n + \frac{1}{e^n})$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$$

On sait que (U_n) est convergente. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$. Comme $U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$ et par passage à la limite :

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}\right) = \frac{1}{e}\lim\limits_{n \to +\infty} U_n + \lim\limits_{n \to +\infty}\frac{1}{e^{n+1}}$. **Donc** $\ell = \frac{1}{e}\ell + 0$ **d'où** $\ell = 0$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

2) Pour tout entier $n \geq 1$; $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

a) D'après l'égalité (*) on a :

$$\begin{cases} U_2 = \frac{1}{e}U_1 + \frac{1}{e^2} \\ U_3 = \frac{1}{e}U_2 + \frac{1}{e^3} \\ U_4 = \frac{1}{e}U_3 + \frac{1}{e^4} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ U_n = \frac{1}{e}U_{n-1} + \frac{1}{e^n} \end{cases}$$

En sommant membre à membre ces égalités :

$$U_2 + U_3 + \ldots + U_n = \frac{1}{e}\left(U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}\right) + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$$

soit $S_n - U_1 = \frac{1}{e}(S_n - U_n) + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$

Comme la partie $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ représente la somme de $(n-1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{e^2}$ et de raison $\frac{1}{e}$, donc:

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\cdots+\frac{1}{e^n}=\frac{1}{e^2}\times\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

Or $U_1=\frac{1}{e}$, donc $$S_n-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(S_n-U_n)+\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(1-\frac{1}{e})S_n=\frac{1}{e}-\frac{1}{e}U_n+\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n=\frac{e-1}{e^2-e}-\frac{1}{e}U_n+\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n=-\frac{1}{e}U_n+\frac{e-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n=-\frac{1}{e}U_n+\frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}$$

$$S_n=-\frac{e}{e-1}\bullet\frac{1}{e}U_n+\frac{e}{e-1}\bullet\frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}$$

$$S_n=\frac{-1}{e-1}U_n+\frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})$$

b) On sait que $\left|\frac{1}{e}\right|<1$.

Cela entraîne que $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{e^n})=1$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})=\frac{e}{(e-1)^2}$.

Or $\lim_{n\to+\infty}U_n=0$, donc $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{e}{(e-1)^2}$.

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout $n>0$ par: $U_1=1;\quad U_{n+1}=\dfrac{U_n}{5U_n+1}$.

1) Calculer U_2 , U_3.

2) Pour tout $n>0$ on pose $V_n=\dfrac{1}{U_n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique. Ecrire V_n puis U_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

c) Calculer en fonction de n : $S_n=V_1+V_2+\cdots+V_n$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=-2$ et pour tout entier $n\geq 0$ on a

$u_{n+1}=\dfrac{n}{2n+2}u_n-\dfrac{1}{n+1}$

1. a) Calculer u_1, u_2 et u_3

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ?

d) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<0$.

c) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n=nu_n+2$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

3) On définit la suite (w_n) par $w_n = nu_n$ et soit $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$.

a) Donner l'expression de w_n à l'aide de v_n.

b) Calculer la somme $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ puis en déduire la valeur de S_n.

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = \frac{3n}{n+1} u_n + \frac{4}{n+1}$$

1.a) Vérifier que $u_2 = \frac{7}{2}$ et $u_3 = \frac{25}{3}$.

b) Justifier que la suite (u_n) n'est in arithmétique, ni géométrique.

c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$

d) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $v_n = nu_n + 2$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = \frac{3^n - 2}{n}$.

3) Soit $S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n$.

A l'aide de v_n, exprimer la somme S_n en fonction de n.

Exercice 4

Soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)U_n$

1.a) Calculer u_1 et u_2

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2n+5}{2n+3} \leq \frac{5}{3}$. En déduire que pour tout entier naturel n,

on a : $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{6} U_n$

c) Prouver alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \leq 3\left(\frac{5}{6}\right)^n$ et calculer la limite de la suite (u_n).

2) Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = \frac{u_n}{2n+3}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

b) Calculer v_0 et exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 5

On définit la suite u_n par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs $a = 2$ et $b = -3$ de u_0 tels que la suite u_n soit constante

2. Soit $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$; après avoir étudiée f sur $\mathbb{R}$, tracer sa courbe représentative ainsi que la droite $y = x$ sur l'intervalle [0 ; 5] et représenter les premiers termes de u_n (on prendra $u_0 = 0$).

Conjecturer le comportement de u_n (sens de variation, limite).

3. Montrer que si u_0 est différent de a et b, il en est de même de u_n (faire une démonstration par récurrence).

4. Calculer $\frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b}$ en fonction de $\frac{u_n-a}{u_n-b}$. En déduire la nature de la suite $v_n=\frac{u_n-a}{u_n-b}$. Donner l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

Calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$U_0=3,\quad U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\ ;\forall n\in \mathbb{N}\ ;$$

1) Calculer U_1, U_2.

2) Soit (V_n) la suite numérique définie par $V_n=U_n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique, exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) Calculer $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$.

Exercice 7

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$\begin{cases} U_1=1 \\ U_{n+1}=3-\dfrac{2n}{3(n+1)}(3-U_n),\ \forall n\in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Vérifier que $U_2=\frac{7}{3}$ puis calculer U_3 ; U_4.

2) On admet que la suite (U_n) est majorée par 3 (a démontrer facilement par récurrence).

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+1}-U_n=\frac{n+3}{3(n+1)}(3-U_n)$.

b) Déduire le sens de variation de la suite (U_n). Puis que la suite (U_n) est convergente.

3) On pose pour tout n de IN^* : $V_n = n(3-U_n)$.

a) Calculer $V_1; V_2$ et montrer que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison.

b) exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Montrer que la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite. En déduire la limite de (U_n).

d) Calculer par une deuxième méthode la limite de (U_n).

4) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = U_1 + 2U_2 + 3U_3 + \cdots + nU_n$.

Exercice 8

La suite (U_n) est définie par et pour tout entier naturel n, par

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1$$

1.a) Calculer les termes U_1, U_2 et U_3.

b) Justifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2.a) Démontrer que pour tout $n \geq 3$, on a $U_n \geq 0$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 4$, on a $U_n \geq n-2$.

c) En déduire la limite de la suite (U_n).

3) On définit la suite (V_n) par $V_n = 4U_n - 8n + 24$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

b) Démontrer que , pour tout entier naturel n, $U_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

c) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

d) En déduire l'expression de la somme $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ en fonction de n.

Exercice 9

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = i$ et, pour tout entier n, $z_{n+1} = \frac{1-i}{2} z_n$. Pour n entier naturel, on appelle M_n le point d'affixe z_n.

1)Calculer z_1, z_2, z_3, z_4.

2) Montrer que pour tout n entier naturel, $z_n = \frac{e^{-i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

3) En déduire que la suite $V_n = |z_n|$ est une suite géométrique. Donner son terme général et sa limite.

Exercice 10

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$U_0 = 0, \quad U_{n+1} = \sqrt{6+U_n}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Calculer U_1, U_2, U_3.

2) Démontrer par récurrence que la $U_n \leq 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que (U_n) est croissante ; conclure.

4) Montrer que $3 - U_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3 - U_n)$; pour tout $n \in \mathbb{N}$..

5) Démontrer par récurrence que : $3 - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 11 (Bac)

On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 3U_n + 10n - 13$.

1.a) Calculer U_1, U_2 et vérifier que $U_3 = 43$.

b) Justifier que la suite numérique (U_n) n'est ni géométrique ni arithmétique.

2) On définit la suite numérique (V_n) par : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n + 5n - 4$.

a) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. Exprimer V_n en fonction de n.

b) A partir de quel terme a-t-on $V_n \geq 2013$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\times(3^n) - 5n + 4$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 12 (Traduit)

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}, \quad \forall n \in IN \end{cases}$ 1) Calculer $U_1;U_2$. 2.a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \le U_n \le \sqrt{3}$. b) Montrer que la suite (U_n) est croissante. c) En déduire que (U_n) est divergente puis calculer sa limite ℓ. 3) Soit (V_n) la suite numérique définie par $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}, \quad \forall n \in IN$ a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1. b) Donner l'expression de V_n en fonction de n. En déduire U_n en fonction de n. c) Retrouver $\lim_{n\to+\infty} U_n$.	نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}, \quad \forall n \in IN \end{cases}$ 1) احسب $U_1;U_2$. 2.a) أثبت بالتراجع أن لكل n من IN : $0 \le U_n \le \sqrt{3}$. b) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة. c) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها ℓ. 3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بما يلي: $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}, \quad \forall n \in IN$. a) بين أن (V_n) متتالية حسابية أساسها 1. b) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج تعبير U_n بدلالة n . c) أوجد من جديد $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 13 (Traduit)

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $U_n = \frac{n^2}{e^n}$.	نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة لكل عدد طبيعي $n \geq 2$ بما يلي: $U_n = \frac{n^2}{e^n}$.
1) Calculer U_2, U_3 et donner une valeur décimale à 10^{-2} près.	1) احسب U_2 ، U_3 وأعط القيمة العشرية بدقة 10^{-2}.
2) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e}$.	2) أثبت أن لكل $n \geq 2$ فإن: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e}$.
3) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e} \leq \frac{9}{4e}$. En déduire que (U_n) est décroissante.	3) أثبت أن لكل $n \geq 2$ فإن: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e} \leq \frac{9}{4e}$ واستنتج أن (U_n) متناقصة.
4) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{9}{4e} U_n$. En déduire que $0 \leq U_n \leq \left(\frac{9}{4e}\right)^{n-2} \times \frac{4}{e^2}$.	4) أثبت أن لكل $n \geq 2$ فإن: $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{9}{4e} U_n$؛ واستنتج أن : $0 \leq U_n \leq \left(\frac{9}{4e}\right)^{n-2} \times \frac{4}{e^2}$.
5) En déduire $\lim_{n\to\infty} U_n$.	5) استنتج $\lim_{n\to\infty} U_n$.

Exercice 14 (Traduit)

On considère la suite numérique (U_n) définie par:	نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي:
$\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{2n+2}{3n} U_n, \quad \forall n \in IN^* \end{cases}$;	$\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{2n+2}{3n} U_n, \quad \forall n \in IN^* \end{cases}$
On pose pour tout n de IN^* : $V_n = \dfrac{1}{n} U_n$.	ونضع : $V_n = \dfrac{1}{n} U_n$ لكل n من IN^*.
1) Calculer U_2 , U_3.	1) احسب U_2 ، U_3 ،
2) Calculer $V_2 ; V_3$.	2) احسب V_2 ، V_3.
3) Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison.	3) بين أن (V_n) متتالية هندسية وحدد أساسها
4) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.	4) أعط عبارة V_n ثم U_n بدلالة n .
5) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \dfrac{U_1}{1} + \dfrac{U_2}{2} + \dfrac{U_3}{3} + \cdots + \dfrac{U_n}{n}$.	5) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \dfrac{U_1}{1} + \dfrac{U_2}{2} + \dfrac{U_3}{3} + \cdots + \dfrac{U_n}{n}$.